

مجموعه‌ها

فصل ۱

پیدایش تاریخی

مجموعه، بدلیل آنکه یکی از مفاهیم غیر قابل تعریف است، تا مدت‌ها مورد بی‌توجهی قرار گرفت و ضرورتی برای پرداختن به آن احساس نشد، تا اینکه جورج کانتور، ریاضی‌دان آلمانی، با مطالعه بر روی مجموعه‌ها و قوانین حاکم بر آنها، توجه همگان را به آن جلب کرد. اهمیت مطالعه بر روی مجموعه‌ها در این است که اگر ویژگی‌ای برای آنها پیدا کردیم، آنگاه می‌توانیم نتیجه بگیریم که آن ویژگی برای تمام پدیده‌هایی در طبیعت که به صورت مجموعه هستند نیز، وجود دارد.

خلاصه نکات مهم

اعداد طبیعی: $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ اعداد حسابی: $I = \{1, 2, 3, \dots\}$ اعداد صحیح: $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

نماد عضویت: \in نماد عدم عضویت: \notin

نماد زیرمجموعه بودن: \subset نماد زیرمجموعه نبودن: $\not\subset$

نماد مجموعه تهی: \emptyset یا $\{\}$ نماد مجموعه مرجع: M یا U

۱- علامت "... در یک مجموعه، به این معناست که اعضای مجموعه با همان روند اعضای نوشته شده و همان نظم و الگو، ادامه می‌یابند.

۲- اگر تمام اعضای مجموعه A ، در مجموعه B وجود داشته باشد، آنگاه A "زیرمجموعه" B است.

۳- اگر دو مجموعه، زیرمجموعه یکدیگر باشند، آنگاه با یکدیگر مساوی خواهند بود.

۴- هر مجموعه‌ای، زیرمجموعه خودش است.

۵- مجموعه تهی، زیرمجموعه تمام مجموعه‌ها است.

۶- "زیرمجموعه محض" برای مجموعه A ، مجموعه‌ای است که حداقل یک عضو، کمتر از مجموعه A داشته باشد.

۷- هیچ مجموعه‌ای، زیرمجموعه محض خودش نیست.

- ۸- مجموعه، نمی تواند عضو تکراری داشته باشد. در واقع از بین اعضای تکراری، فقط یکی از آنها باقی می ماند و بقیه حذف می شوند.
- ۹- ترتیب در نوشتن اعضای مجموعه، تأثیر ندارد. یعنی، می توان ترتیب اعضای مجموعه را به دلخواه جابجا کرد.
- ۱۰- مجموعه ای که تمام مجموعه ها، اعضای خود را از آن انتخاب می کنند "مجموعه مرجع" نام دارد و معمولاً آن را با M یا U نشان می دهند.
- ۱۱- تمام مجموعه ها، زیرمجموعه، مجموعه مرجع هستند.
- ۱۲- "متمم مجموعه A "، مجموعه ای است که اعضای آن در A نباشند. یعنی باید اعضای از مجموعه مرجع را انتخاب کنیم، که برای ساختن مجموعه A استفاده نشده اند. متمم مجموعه A را با A' نشان می دهند.
- ۱۳- تعداد اعضای یک مجموعه را "عدد اصلی" آن می گویند. عدد اصلی مجموعه A را با $n(A)$ نشان می دهند.
- ۱۴- اگر همه زیرمجموعه های A را درون یک مجموعه بزرگ بریزیم، آن را "مجموعه توانی A " می نامند و با $P(A)$ نشان می دهند. در واقع $P(A)$ مجموعه ای است که از تمام زیرمجموعه های A تشکیل شده است.
- ۱۵- "اجتماع A و B "، مجموعه ای است که همه اعضای مجموعه های A و B را در آن ریخته ایم. آن را به صورت $A \cup B$ نشان می دهند.
- ۱۶- "اشتراک A و B "، مجموعه ای است که اعضای مشترک در مجموعه های A و B را در آن ریخته ایم. آن را به صورت $A \cap B$ نشان می دهند.
- ۱۷- تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه n عضوی برابرست با 2^n .
- ۱۸- تعداد زیرمجموعه های محض مجموعه n عضوی برابرست با $2^n - 1$.
- ۱۹- اگر تعداد اعضای یک مجموعه، محدود باشد، آن را "مجموعه متناهی" گویند و در غیر اینصورت آن را "مجموعه نامتناهی" گویند.
- ۲۰- "نمودار ون"، نمایش مجموعه ها با کمک اشکال هندسی است و معمولاً از مستطیل برای نشان دادن مجموعه مرجع و از دایره ها برای نشان دادن مجموعه های دیگر استفاده می کنند.

↑ پرسش‌های مفهومی

۱- الف) اگر مرجع را کل دانش آموزان در نظر بگیریم، مجموعه‌های A و B و C، را با نمودار ون نمایش دهید.



A = تمام دانش آموزانِ کلاس دوم

B = دانش آموزانِ کلاس دومی، که راست دست هستند

C = دانش آموزانِ کلاس دومِ راست دستی، که خوش خط هستند

ب) اکنون رابطه‌های زیرمجموعه بودن را برای A و B و C بنویسید: $\dots \subset \dots \subset \dots$

ج) اکنون این عبارت را با "E" و "F" کامل کنید: "بنابراین اگر برای اعضای مجموعه دلخواهی مانند E، ویژگی‌ها و شرطهای بیشتری قرار دهیم، مجموعه‌ای مانند F خواهیم داشت که $\dots \subset \dots$ "

۲- می‌دانیم که "متوازی‌الاضلاع، چهارضلعی‌ای است که اضلاع روبرویش دو به دو موازی هستند" و "مستطیل، متوازی‌الاضلاعی است که چهار زاویه قائمه دارد".



الف) با توجه به این جملات، مجموعه مرجع را مشخص کرده و مجموعه مستطیل‌ها و متوازی‌الاضلاع‌ها را با نمودار ون، درون مجموعه مرجع رسم کنید.

ب) اکنون رابطه زیرمجموعه بودن را برای مستطیل‌ها و متوازی‌الاضلاع‌ها بنویسید: $\dots \subset \dots$

ج) جاهای خالی را با واژه‌های "مستطیل" و "متوازی‌الاضلاع" کامل کنید: "هر نوعی است".

۳- عبارت صحیح را مشخص کرده و برای هر کدام، مثالی بزنید.

الف) یک مجموعه نامتناهی نمی‌تواند زیرمجموعه متناهی داشته باشد.

ب) یک مجموعه نامتناهی نمی‌تواند زیرمجموعه نامتناهی داشته باشد.

ج) یک مجموعه متناهی نمی‌تواند زیرمجموعه نامتناهی داشته باشد.

۴- کدام عبارت نادرست است؟ چرا؟

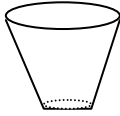
الف) اگر تمام زیرمجموعه‌های محض مجموعه A، متناهی باشند، خودش نیز متناهی است.

ب) اگر مجموعه A، حداقل یک زیرمجموعه نامتناهی داشته باشد، خودش نیز نامتناهی است.

ج) اگر A زیرمجموعه B باشد، آنگاه همواره B حداقل یک عضو بیشتر از A دارد.

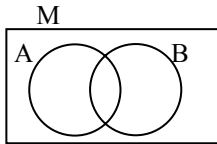
د) اگر متمم A برابر با مجموعه مرجع باشد، آنگاه A متناهی است.

۵- برای نشان دادن مجموعه تهی، از یک ظرف خالی مانند شکل زیر، استفاده کردیم. برای نشان دادن $\{\phi\}$ باید چه شکلی را به کار ببریم؟

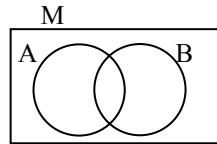


- ۶- اشتراک مجموعه با هر مجموعه دلخواه مانند A ، برابرست با A .
- ۷- اشتراک مجموعه با هر مجموعه دلخواه مانند A ، برابرست با ϕ .
- ۸- اجتماع مجموعه با هر مجموعه دلخواه مانند B ، برابرست با B .
- ۹- اجتماع مجموعه با هر مجموعه دلخواه مانند B ، برابرست با مرجع.

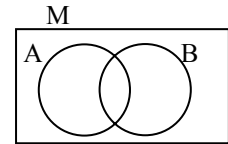
۱۰- در نمودارهای زیر، مجموعه‌های خواسته شده را هاشور بزنید.



(ج) $(A \cap B)'$



(ب) $(A \cup B)'$



(الف) $A' \cap B$

۱۱- آیا مجموعه‌ای وجود دارد که نتواند زیر مجموعهٔ محض داشته باشد؟

۱۲- در میان اعداد ۳۰ تا ۷۰ ... :

(الف) کدام عددها می‌توانند نشان دهنده تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه باشند؟

(ب) کدام عددها می‌توانند نشان دهنده تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعه باشند؟

۱۳- اعداد m و n را با ذکر دلیل، طوری تعیین کنید که هم $A \subset B$ و هم $B \subset A$ باشد.

$$B = \{34, n, 16, 18\}$$

$$A = \{m, 2, 16, 34\}$$

(ب) متمم "مجموعه تهی" چیست؟

۱۴- (الف) متمم "مجموعه مرجع" چیست؟

۱۵- کدامیک از مجموعه‌های زیر، مجموعه اعداد اول را به درستی نشان می‌دهد؟ دلیل خود را بنویسید.

(ج) $\{1, 2, 3, 5, 7, \dots\}$

(ب) $\{3, 5, 2, 7, \dots\}$

(الف) $\{2, 3, 4, 7, \dots\}$

۱۶- کدام رابطه بین مجموعه اعداد طبیعی و مجموعه اعداد حسابی و مجموعه اعداد صحیح برقرار است؟

(ج) $N \subset Z \subset I$

(ب) $N \subset I \subset Z$

(الف) $Z \subset I \subset N$

(↓) پرسش های مهارتی

۱- مجموعه A شامل مقسوم علیه های اول عدد ۲۱۰ می باشد.
الف) مجموعه A را با اعضاء بنویسید.

ب) مجموعه A چند زیر مجموعه و چند زیر مجموعه محض دارد.

ج) تمامی زیر مجموعه های سه عضوی مجموعه A را بنویسید.

د) اشتراک تمامی زیر مجموعه های سه عضوی مجموعه A را بنویسید.

ه) اجتماع تمامی زیر مجموعه های سه عضوی مجموعه A را بنویسید.

۲- یک مجموعه $k+2$ عضوی دارای ۱۲۸ زیرمجموعه می باشد. k را بدست آورید.

۳- اگر یک مجموعه $n-3$ عضوی، دارای ۶۳ زیرمجموعه محض باشد، یک مجموعه $n+2$ عضوی چند زیرمجموعه خواهد داشت؟

۴- عدد اصلی مجموعه A را بنویسید و سپس $P(A)$ را تشکیل دهید.

$$A = \left\{ 1, 2, \frac{3}{3}, 2^{\circ}, \frac{6}{2}, (3+2)^{\circ} \right\}$$

= عدد اصلی

$$P(A) =$$

۵- اگر به تعداد اعضاء مجموعه ای، ۳ عضو جدید اضافه شود، تعداد زیر مجموعه های آن چند برابر می شود؟

۶- اگر از تعداد اعضاء مجموعه ای ۲ عضو کم شود، تعداد زیر مجموعه های آن چگونه تغییر می کند؟

۷- مجموعه $M = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰\}$ مجموعه مرجع و مجموعه های $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ و $B = \{۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰\}$ زیرمجموعه هایی از M می باشند. مجموعه های زیر را با اعضاء بنویسید.

$$A' =$$

$$B' =$$

$$A \cup A' =$$

$$A \cap A' =$$

$$B \cup B' =$$

$$B \cap B' =$$

$$A \cap M =$$

$$A \cup M =$$

$$B \cup M =$$

$$B \cap M =$$

۸- اگر $A \subset B$ باشد، تساویهای زیر را کامل کنید.

الف) $A \cap B = \dots$

ب) $A \cup B = \dots$

۹- با توجه به مجموعه A ، درستی یا نادرستی عبارات زیر را (با ذکر دلیل) مشخص کنید:

$$A = \{\phi, \{\phi\}, a, \{a\}\}$$

الف) $\phi \subset A$

ز) $a \in A$

ب) $\phi \in A$

ح) $\{a\} \in A$

ج) $\{\phi\} \subset A$

ط) $a \subset A$

د) $\{\phi\} \in A$

ی) $\{a\} \subset A$

هـ) $\{\{\phi\}\} \in A$

ک) $\{\{a\}\} \in A$

و) $\{\{\phi\}\} \subset A$

ل) $\{\{a\}\} \subset A$

۱۰- مجموعه A را بصورت زیر تشکیل دهید: اعداد دو رقمی مضرب ۳ که ارقام آنها اول باشد.

الف) زیر مجموعه ای از A بنام B بنویسید که اعضایش مضرب ۶ باشد.

ب) زیر مجموعه ای از A بنام C بنویسید که اعضایش اول باشد.

ج) عدد اصلی مجموعه های A و $P(A)$ را مشخص کنید.

۱۱- هرگاه $A \subset B$ و $B \subset C$ باشد، آیا می توان گفت که $A \subset C$ است؟ چرا؟

۱۲- اگر $A \subset B$ و $A \subset C$ باشد، آیا می توان نتیجه گرفت که $B = C$ ؟ چرا؟

۱۳- اگر $A \cap B = A \cap C$ باشد، آیا $B = C$ می باشد؟ چرا؟

۱۴- اگر $A \cup B = A \cup C$ باشد، آیا $B = C$ می باشد؟ چرا؟

۱۵- هرگاه دو مجموعه جدا از هم A و B روی هم ۹ عضو داشته باشند و تعداد زیر مجموعه های A ، هشت برابر تعداد زیر مجموعه های B باشد، A چند عضو دارد؟

۱۶- اگر A و B مجموعه های دلخواهی باشند، درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

الف) $(A \cap B) \subset A$

ب) $(A \cup B) \subset (A \cap B)$

ج) $(A \cap B) \subset (A \cup B)$

د) $A \subset (A \cap B)$

۱۷- اگر M مجموعه مرجع باشد و A و B زیرمجموعه هایی از M باشند، تساویهای زیر را کامل کنید.

الف) $A \cap M =$

ب) $A \cup \phi =$

ج) $A \cup M =$

د) $(A \cap B) \cup M =$

هـ) $A \cap A' =$

و) $(A \cup B) \cup M =$

ز) $A \cup A' =$

ح) $A \cap \phi =$

$$\text{ط) } B \cap M =$$

$$\text{ی) } (A \cup B) \cap \phi =$$

$$\text{ک) } B \cup M =$$

$$\text{ل) } B \cap B' =$$

۱۸- دو مجموعه نامتناهی و جدا از هم بنویسید که اجتماع آنها مجموعه N را تشکیل دهد.

۱۹- سه مجموعه نامتناهی و جدا از هم بنویسید که اجتماع آنها مجموعه N را تشکیل دهد.

۲۰- اگر مجموعه A دارای چهار عضو و مجموعه B دارای ۷ عضو باشند، مجموعه های $A \cap B$ و $A \cup B$ حداقل و حداکثر چند عضو دارند؟

۲۱- مجموعه A را بصورت زیر تشکیل دهید: اعداد اول دو رقمی که ارقام آنها اول باشد.

الف) تمام زیر مجموعه های A را بنویسید.

ب) مجموعه $P(A)$ چند زیر مجموعه دارد؟

۲۲- اگر مجموعه A دارای ۳ عضو و مجموعه B دارای ۴ عضو باشد، آنگاه مجموعه $A \cap (A \cup B)$ چند عضو دارد؟
الف) ۴ ب) ۳ ج) ۷ د) نمی توان تعیین کرد.

۲۳- تعداد زیر مجموعه های مجموعه $A = \{\{1,2,3,4\}\}$ برابر است با:

الف) ۲ ب) ۴ ج) ۱۶ د) ۱

۲۴- مجموعه مقسوم علیه های مشترک اعداد ۲۸۰ و ۴۲۰ چند عضو دارد؟

الف) ۴ ب) ۲ ج) ۱۲ د) ۸

۲۵- اگر مجموعه A ، ۳ عضو و مجموعه B ، ۵ عضو داشته باشد، $A \cup B$ حداقل و حداکثر چند زیرمجموعه دارد؟
الف) ۸ و ۳۲ ب) ۳۲ و ۲۵۶ ج) ۴ و ۳۲ د) ۴ و ۲۵۶

۲۶- اگر مجموعه A دارای ۷ زیر مجموعه محض باشد، مجموعه $P(A)$ چند زیر مجموعه دارد؟

الف) ۸ ب) ۳ ج) ۲۵۶ د) ۱۶

۲۷- برای مجموعه A چند جواب وجود دارد، به طوری که: $\{2,5\} \cap A = \{1,2,3,4\}$
 الف) یک جواب (ب) دو جواب (ج) بی شمار (د) جواب ندارد.

۲۸- برای مجموعه B چند جواب وجود دارد، به طوری که: $\{1,2,3\} \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$
 الف) یک جواب (ب) دو جواب (ج) هشت جواب (د) هیچکدام.

۲۹- اگر $n(A) = n(A') = 4$ باشد، عدد اصلی مجموعه مرجع چند است؟
 الف) ۶ (ب) صفر (ج) ۸ (د) نمی توان تعیین کرد

۳۰- مجموعه B به نحوی است که $n(B) = n(B')$ است. عدد اصلی مجموعه مرجع چند است؟
 الف) صفر (ب) عددی زوج (ج) عددی فرد (د) نمی توان تعیین کرد

۳۱- مجموعه های A و B به نحوی هستند که اگر از مجموعه A هر عضو دلخواهی را برداشته و به مجموعه B بیفزاییم، عدد اصلی مجموعه B تغییر نمی کند. پس می توان نتیجه گرفت که:
 الف) $A \subset B$ (ب) $B \subset A$ (ج) $A \cap B \neq \Phi$ (د) $A \cup B = A$



موضوعات تحقیق:

- چرا مجموعه های اعداد طبیعی را با N و اعداد حسابی را با I و اعداد صحیح را با Z نشان می دهند؟
- برای مجموعه اعداد زوج و مجموعه اعداد فرد و مجموعه اعداد اول، هر کدام چه حرفی را پیشنهاد می کنید؟
- چرا برای نشان دادن عضویت از نماد \in استفاده می شود؟
- آیا مجموعه ای بزرگتر از مجموعه اعداد صحیح (Z) وجود دارد؟

کلیدواژه های جستجو در اینترنت:

"مجموعه اعداد"، "اعداد طبیعی"، "set theory"، "set"، "subset"، "element"